

グラフの埋め込みと領域被覆

The embedding of Graph and face cover

樋山 雅史
Hiyama Masashi

Abstract

第1章では、2次元多様体の曲面上へのグラフの埋め込みについて述べ、完全グラフ、完全2部グラフおよび n -立方体の種数や最大種数などを紹介し、その他、2-胞体埋め込みの1つの表示方法である rotation scheme について説明する。

第2章では、曲面上への連結グラフの2-胞体埋め込みにおいて、曲面の種数と領域被覆数の関係について次のように考察する。

§1では、1-埋め込みにのみ限定し、どのような性質をもつグラフの1-種数が存在するかについて述べる。§2では、完全グラフおよび完全2部グラフの1-種数について、§3では、 n -立方体の d -種数について考察する。

第1章 グラフの埋め込み

§1. 曲面への埋め込み

2次元多様体は何個かの「ハンドル」が付けられた球面と考えてもよいし、あるいは何個かの「穴」をあけた球面と考えてもよい。ハンドル（または穴）の個数は曲面の種数といわれる。

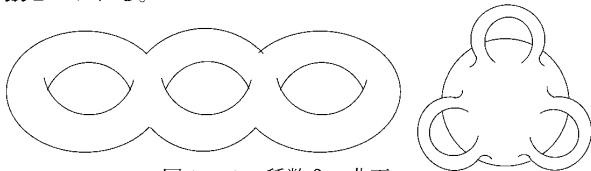


図1.1 種数3の曲面

グラフ G の種数 $\gamma(G)$ とは、 G を埋め込むことができる曲面がとり得る最小の種数のことである。したがって、全てのグラフは種数をもつ。実際、簡単にわかるように、大きさ q のグラフは種数 q の曲面上に埋め込むことができる。

グラフの球面上への埋め込みと平面上への埋め込みは同じであるから、種数0のグラフは平面的グラフであることを意味する。したがって、種数1のグラフは、トーラス上に埋め込み可能であるが、平面（球面）上には埋め込むことができない、すなわち非平面的グラフである。

正の種数をもつ曲面上に埋め込まれたグラフに対しても、領域およびその境界は平面への埋め込みの場合と全く同様に定義する。すなわち、 G が曲面 S 上に埋め込まれているとすると、 $S-G$ の成分がその埋め込みの領域である。図1-2 (a)には領域が3個あり、(b)には領域が2個ある。

領域 R が2-胞体と呼ばれるのは、 R 内の任意の単純閉曲線が R 内で連続的に変形あるいは縮小して1つの点にできる場合である。球面上に埋め込まれた連結グラフのすべての領域は必ず2-胞体であるが、連結グラフを正種数の曲面上へ埋め込んだ場合に、必ずしもそうであるとは限らない。

曲面 S 上へのグラフ G の埋め込みが、 S 上への G の2-胞体埋め込みと呼ばれるのは、埋め込みにより定まる領域がすべて2-胞体の場合である。図1.2において、(a)は2-胞体埋め込みであるが、(b)はそうではない。

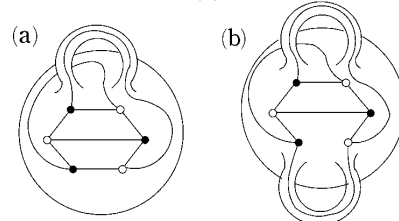


図1.2 $K(3,3)$ の種数1および2の曲面上への埋め込み

命題1.1 [BCL]

G は連結 (p, q) グラフであり、種数 n の曲面上に2-胞体埋め込みされていて、 r 個の領域をもつとき

$$p - q + r = 2 - 2n$$

である。

命題1.2 [Y]

G を連結 (p, q) グラフとする。 G の種数が最小となる埋め込みは2-胞体埋め込みである。

命題1.3 [Y]

G が連結 (p, q) グラフであるならば ($p \geq 3$)

$$\gamma(G) \geq \frac{q}{6} - \frac{p}{2} + 1$$

である。

次に、完全グラフ、完全2部グラフおよび n -立方体の種数をあげることにする。

定理1.4 [R4]

完全グラフ K_p の種数は

$$\gamma(K_p) = \left\lceil \frac{(p-3)(p-4)}{12} \right\rceil \quad (p \geq 3)$$

($\lceil \cdot \rceil$ は小数点以下切り上げを意味する)

で与えられる。

定理1.5 [R3]

完全2部グラフ $K(m, n)$ の種数は

$$\gamma(K(m, n)) = \left\lceil \frac{(m-2)(n-2)}{4} \right\rceil \quad (m, n \geq 2)$$

で与えられる。

定理1.6 [R2], [BH]

$n \geq 2$ に対して、 n -立方体 Q_n の種数は、

$$\gamma(Q_n) = (n-4) \cdot 2^{n-3} + 1$$

で与えられる。

§ 2. Rotation scheme (循環埋め込み図式)

前節では、任意のグラフ G が種数をもつこと、すなわち G を埋め込むことができる最小種数の曲面が存在することを紹介した。実際命題 1. 2 に紹介したように、連結グラフ G が種数 $\gamma(G)$ の曲面上に埋め込まれているならば、その埋め込みは必ず 2-胞体埋め込みである。一方、非連結グラフに対しては 2-胞体埋め込みは存在しない。

以下、種数 n の曲面のことを、便宜上 S_n と書くことができる。

図 1. 3 に示した K_5 のトーラス上への 2-胞体埋め込みを考えてみる。ここで、 K_5 の頂点は下の図 1. 3 のようにラベル付けされているとする。この埋め込みにおいて、 v_1 に接続している辺は v_1 の周りに反時計回りに $v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_1v_5$ と配置されている。これから v_1 に隣接している頂点の添字の巡回置換 $\pi_1 = (2, 3, 4, 5)$ がつくられる。同様に $v_i (2 \leq i \leq 5)$ に対しても、 v_i に巡回置換 π_i を対応させることができる。図 1. 3 の場合、

$$\begin{aligned}\pi_1 &= (2, 3, 4, 5) \\ \pi_2 &= (1, 5, 4, 3) \\ \pi_3 &= (1, 5, 2, 4) \\ \pi_4 &= (1, 3, 2, 5) \\ \pi_5 &= (1, 3, 4, 2)\end{aligned}$$

である。

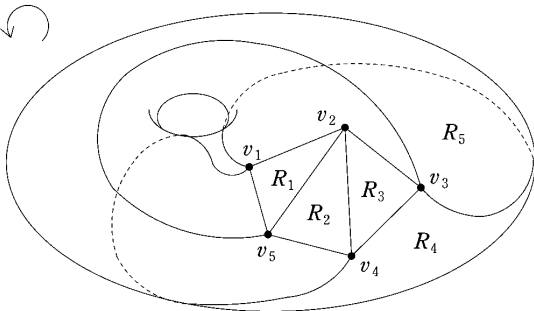


図 1. 3 トーラス上へ埋め込まれた K_5

図 1. 3 に示した K_5 のトーラス上への 2-胞体埋め込みには、 R_1, R_2, \dots, R_5 とラベル付けされた 5 つの領域がある。どの領域 $R_i (1 \leq i \leq 5)$ も 2-胞体である。領域 R_1 の境界は、頂点 v_1, v_2, v_5 および辺 v_1v_2, v_2v_5, v_5v_1 からなっている。もし境界の辺を時計回りにたどれば、辺 v_1v_2, v_2v_5, v_5v_1 という順になる。この情報も巡回置換 $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_5$ から得られる。実際には、 R_1 の境界辺を時計回りにたどるときに $v_1v_2 = v_2v_1$ の次にくる辺は、 v_2 に接続している辺で、 v_2 の周りを反時計回りに進むときに v_2v_1 の次にくる辺のことである。すなわち R_1 の境界で v_1v_2 の次の辺は $v_2v_{\pi_2(1)} = v_2v_5$ である。同様に、 $v_2v_5 = v_5v_2$ の次にくる辺は $v_5v_{\pi_5(2)} = v_5v_1$ である。このようにして、巡回置換 $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_5$ を用いれば、 R_1 の境界の辺をたどることができる。同様に、その埋め込みのすべての領域の境界を記述できる。

上の記述においては、領域の境界をたどる向き（時計回り）が最も大切であるから、 K_5 の各辺を互いに逆方向と考える辺の対と見なして、 K_5 自信をダイグラフ D と見なすと便利である。この解釈により、領域 R_1 の境界並びに R_1 自身は、 v_1 から始めるとして、

$$(v_1, v_2), (v_2, v_{\pi_2(1)}), (v_5, v_{\pi_5(2)})$$

すなわち、

$$(v_1, v_2), (v_2, v_5), (v_5, v_1) \quad (1. 1)$$

と書くことができる。

ここで、 K_5 の辺の集まりを $E(D)$ として、写像 $\pi: E(D) \rightarrow E(D)$ を次のように定義する。 $a \in E(D)$ として、 $a = (v_i, v_j)$ としたとき、

$$\pi(a) = \pi((v_i, v_j)) = \pi(v_i, v_j) = \pi(v_j, v_{\pi_j(i)})$$

である。写像 π は 1 対 1 であるから、 $E(D)$ の置換である。よって π は互いに素な巡回置換の積として表すことができる。この意味において、 π のどの巡回置換も π の「軌道」と見なせる。こうして、式 (1. 1) は π の軌道に対応しており、より簡単に $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_5 \rightarrow v_1$ と書かれることが多い。

(この軌道はグラフの 1 つの閉路と対応しているが、2-胞体埋め込みされたグラフの任意の軌道がいつもそうであるとは限らない)。図 1. 3 に示した K_5 のトーラス上への埋め込みに対する 5 つの軌道を列挙すると次のようになる。

$$\begin{aligned}R_1: & v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_5 \rightarrow v_1 \\ R_2: & v_2 \rightarrow v_4 \rightarrow v_5 \rightarrow v_2 \\ R_3: & v_2 \rightarrow v_3 \rightarrow v_4 \rightarrow v_2 \\ R_4: & v_1 \rightarrow v_4 \rightarrow v_3 \rightarrow v_1 \\ R_5: & v_1 \rightarrow v_5 \rightarrow v_3 \rightarrow v_2 \rightarrow v_1 \rightarrow v_3 \rightarrow v_5 \rightarrow v_4 \rightarrow v_1\end{aligned}$$

π の軌道は $E(D)$ の分割をつくり、このようにして D の各弧は π の軌道のちょうど 1 つにだけ現れる。 D は K_5 の各辺を対称な弧の対で置き換えて得られたダイグラフであるので、 K_5 の各辺は π の軌道のうちに 2 度現れる、すなわち辺につけられた 2 つの可能な向きそれぞれに対して一度現れる。

図 1. 3 に示された K_5 のトーラス上への 2-胞体埋め込みは、 K_5 の頂点に隣接している頂点の添字の置換の族 $\{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_5\}$ を一意に決定する。逆に、置換の族は図 1. 3 に示す K_5 のトーラス上への埋め込みを完全に記述している。

埋め込みのこの記述法は、**循環埋め込み図式**と言われる。以下、循環埋め込み図式のことを **rotation scheme** ともいう。

命題 1. 7 (循環埋め込み図式)

G は自明でない連結グラフであり、 $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ とする。 G の曲面上へのどのような 2-胞体埋め込みに対しても、ただ一つの rotation scheme $(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_p)$ が存在する。ここで、各 $\pi_i: V(i) \rightarrow V(i) (i=1, 2, \dots, p)$ は巡回置換であり、 v_i の反時計回りに v_i に隣接している頂点の添字を順に表している。(ただし、 $V(i)$ は頂点 v_i に隣接する頂点の添字の集

合を表すものとする。)

逆に、このような各 rotation scheme $(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_p)$ に対し、 G のある曲面上への 2 - 胞体埋め込みで、 v_i に反時計回りに隣接している頂点の添字列が π_i で与えられるものが存在する。

§ 3. グラフの最大種数

連結グラフ G が与えられた場合、 G は $n \geq \gamma(G)$ なる曲面 S_n 上に埋め込み可能であることは自明である。そこで、2 - 胞体埋め込みに注目すれば、 G はどんな曲面 S_n 上に 2 - 胞体埋め込み可能であるだろうか。すなわちこの n には上限があるのだろうか。この問題に対する 1 つの手段として、次の Duke の「内挿定理」[D] がある。

命題 1. 8 [D]

もし、種数 m および n の曲面 S_m, S_n 上への連結グラフ G の 2 - 胞体埋め込みが存在して、 $m \leq n$ であり、しかも k は $m \leq k \leq n$ なる任意の整数ならば、種数 k の曲面 S_k への G の 2 - 胞体埋め込みが存在する。

G は $\gamma(G) = m$ なる連結グラフであるとし、 G を 2 - 胞体に埋め込むことができる曲面 S_n のうち一番大きい正整数を n とすると、命題 1. 8 により、 $m \leq k \leq n$ のとき、かつそのときに限り G は S_k 上に 2 - 胞体埋め込み可能である。

G を連結グラフとする。 G の最大種数 $r_M(G)$ は、 G を 2 - 胞体埋め込み可能な曲面の種数の最大値である。

したがって、命題 1. 8 より次の系を得る。

系 1. 9 [D]

連結グラフ G が曲面 S_k 上への 2 - 胞体埋め込みをもつための必要十分条件は、

$$\gamma(G) \leq k \leq r_M(G)$$

である。

k 個の成分をもつ (p, q) グラフの Betti 数 $B(G)$ は、

$$B(G) = q - p + k$$

と定義される。したがって、 G が連結グラフならば、 $B(G) = q - p + 1$ である。

命題 1. 10 [NSW]

G が連結グラフならば、

$$r_M(G) \leq \left\lfloor \frac{B(G)}{2} \right\rfloor$$

($\lfloor \cdot \rfloor$ は小数点以下切り捨てを意味する)

である。さらに、等号が成り立つための必要十分条件は、種数 $r_M(G)$ の曲面上への G の 2 - 胞体埋め込みで、 $B(G)$ が偶数のときは領域をちょうど 1 個もち、奇数のときにはちょうど 2 個もつような埋め込みが存在することである。

連結グラフ G が上埋め込み可能と呼ばれるのは、 G の最大種数が命題 1. 10 で与えられた上界に達しているとき、すなわち $r_M(G) = \lfloor B(G)/2 \rfloor$ であるときである。

命題 1. 11 [KRW]

すべての完全 n - 部グラフ ($n \geq 2$) は上埋め込み可能である。

系 1. 12 [KSW]

K_p の最大種数は、

$$r_M(K_p) = \left\lfloor \frac{(p-1)(p-2)}{4} \right\rfloor$$

で与えられる。

系 1. 13 [R1]

$K(m, n)$ の最大種数は、

$$r_M(K(m, n)) = \left\lfloor \frac{(m-1)(n-1)}{2} \right\rfloor$$

で与えられる。

系 1. 14 [Z]

Q_n ($n \geq 2$) の最大種数は、

$$r_M(Q_n) = (n-2) \cdot 2^{n-2}$$

で与えられる。

第2章 グラフの埋め込みと領域被覆

前章に紹介したように、すべての連結グラフ G は $\gamma(G) \leq k \leq r_M(G)$ を満たす任意の整数 k を種数とする曲面上に 2 - 胞体埋め込み可能である。そこで本章では、これらの G の 2 - 胞体埋め込みにおける領域被覆数と曲面の種数の関係について考察する。

§ 1. 領域被覆

この章において、単に「埋め込み」という場合、「2 - 胞体埋め込み」を表すものとする。

連結グラフ G が曲面 S 上に埋め込まれているとする。このとき、領域 R_1, R_2, \dots, R_d の境界上に G のすべての頂点があるとき、これらの d 個の領域を G の領域被覆といい、領域 R_1, R_2, \dots, R_d は、 G のすべての頂点を覆うという。 G を曲面 S 上へ埋め込んだときの領域被覆の個数 d の最小値を、 G の S への埋め込み ψ に対する領域被覆数といい、 $f(G, S, \psi)$ で表す。また、 G を曲面 S 上へ、 $f(G, S, \psi)$ が最小になるように埋め込んだときの領域被覆数を、 G の S に関する領域次元といい、 $f(G, S)$ で表す。すなわち、 $f(G, S) = \min\{f(G, S, \psi) : \psi \text{ は } G \text{ の } S \text{ 上への埋め込み}\}$ である。(注意：これに対して、埋め込みを 2 - 胞体埋め込みに限らない場合、この領域次元のことをディスク次元といい、 $d(G, S)$ で表す。したがって、連結グラフ G に対して一般に、 $d(G, S) \leq f(G, S)$ であり、特に、 S^2 に対しては、 $d(G, S^2) = f(G, S^2)$ が成り立つ。)

連結グラフ G に対して、 $f(G, S) \leq d$ であるような埋め込みを、 G の S 上への d - 埋め込みという。また、ある自然数 d に対して、 G が d - 埋め込み可能な曲面の種数の最

小値を G の d -種数といい、 $r_d(G)$ で表す。すなわち、 $r_d(G) = \min\{r(S) : f(G, S) \leq d\}$ である。ただし、 G に対してそのような埋め込みが存在しないときは、 $r_d(G) = \infty$ と定義する。

この場合、 d -埋め込みは、定義より $(d+1)$ -埋め込みでもあるから、次の命題を得る。

命題 2. 1

任意の連結グラフ G に対して、ある $k \in \mathbb{N}$ が存在して

$$r_1(G) \geq r_d(G) \geq \dots \geq r_k(G) = r(G)$$

が成り立つ。

また、連結グラフ G の d -種数について、次の基本定理を得る。

命題 2. 2

G が連結 (p, q) グラフであるならば、

$$r_d(G) \geq \frac{q}{6} - \frac{p}{3} - \frac{d-2}{2}$$

である。

証明

G が種数 n の曲面上に d -埋め込みされているとする。このときの領域の個数を r とすると、Euler の公式から、

$$p - q + r = 2 - 2n$$

である。また、領域被覆である d 個の領域の境界上には少なくとも合計 p 個の頂点、いいかえれば p 本の辺があり、残りの $r-d$ 個の領域の境界上にはそれぞれ少なくとも 3 本の辺があることから、

$$p + 3(r-d) \leq 2q$$

が成り立つ。これら 2 式から r を消去して整理すると、

$$n \geq \frac{q}{6} - \frac{p}{3} - \frac{d-2}{2}$$

を得る。■

そこで、任意の連結グラフ G に対して実際に 1-種数は存在するのであろうか、これが基本的問題としてあげられる。特定の性質をもつグラフに対しては次に示すように 1-種数が存在することが証明できた。しかし、今のところ一般的なグラフに対する反例がなく、この問題は解決されていない。

命題 2. 3

オイラーグラフの 1-種数は存在する。

証明

頂点 v に隣接する頂点を $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ (k は偶数) とし、オイラー回路を T とする。適当に添字の番号を付け替えて、 T 上で辺 $u_{2i-1}v$ と vu_{2i} が連続して現れるようにする。頂点 v に対する rotation を

$$\pi_v = (u_1, u_2, \dots, u_k)$$

と定義し、他の頂点に対しても同様にして rotation を定義する。このとき、1 つの軌道はこのオイラー回路 T を表す、すなわち、その軌道に対応する領域の境界上に、この

グラフのすべての頂点があることになる。

したがって、オイラーグラフの 1-種数は存在する。

命題 2. 4

2-因子をもつグラフの 1-種数は存在する。

この命題は、次の補題を用いて証明できる。

補題 2. 5 (Ringelstein-White の辺付加補題)

G は連結グラフであり、 $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ であり、 v_i と v_j は異なる非隣接点であるとする。ある曲面 S_h 上への G の 2-胞体埋め込みで、 r 個の領域 R_1, R_2, \dots, R_r をもつものが存在し、しかも v_i は領域 R_i の境界上であり、 v_j は領域 R_j の境界上にあると仮定する。

$H = G + v_i v_j$ とする。このとき、

(1) もし、 $R_i \neq R_j$ ($i < j$ と仮定する) ならば、 S_{h+1} 上への H の 2-胞体埋め込みで、 $r-1$ 個の領域 $R_1, R_2, \dots, R_{i-1}, R_{i+1}, \dots, R_{j-1}, R_{j+1}, \dots, R_r$ をもつものが存在して、 v_i と v_j は同じ領域 R の境界上にある。

(2) もし、 $R_i = R_j$ ならば、 S_h 上への H の 2-胞体埋め込みで、 $r+1$ 個の領域 $R_1, R_2, \dots, R_{i-1}, R_{i+1}, \dots, R_r, R', R''$ をもつものが存在して、 v_i と v_j のどちらも 2 つの異なる領域 R', R'' の両方の境界上にある。

証明

仮定により、 (p, q) グラフ G の S_h 上への 2-胞体埋め込みで r 個の領域をもつものが存在し、 v_i は領域 R_i の境界上にあり、 v_j は領域 R_j の境界上にある。命題 1. 7 により、rotation scheme $(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_p)$ がこの埋め込みに対応するとする。すなわち $t=1, 2, \dots, p$ について、 $\pi_t: V(t) \rightarrow V(t)$ は v_t の隣接する頂点の添字を、 v_t を中心にして反時計回りの順序に並べた巡回置換である。

G の各辺を対称な弧の対で置き換えて得られるダイグラフを D とし、 $\pi: E(D) \rightarrow E(D)$ は $\pi(v_m, v_n) = (v_n, v_{\pi(m)})$ で定義することにする。与えられた埋め込みは r 個の領域をもつので、 π は r 個の軌道をもつ。各領域とそれに対応する軌道を同じ記号で書くことにする。

(1) $R_i \neq R_j$ とする。このとき、軌道 R_i と R_j を

$$R_i: v_i \rightarrow v_k \rightarrow \dots \rightarrow v_k \rightarrow v_i$$

$$R_j: v_j \rightarrow v_s \rightarrow \dots \rightarrow v_s \rightarrow v_j$$

と表すことができる。したがって、

$$\pi_i(k') = k \text{ かつ } \pi_j(s') = s$$

である。ここで、グラフ $H = G + v_i v_j$ を考えて、 $t=1, 2, \dots, p$ について、

$$V'(t) = \{r \mid v_r v_t \in E(H)\}$$

と定義する。したがって、 $t \neq j$, i に対しては $V'(t) = V(t)$ であり、 $V'(i) = V(i) \cup \{j\}$ かつ $V'(j) = V(j) \cup \{i\}$ である。

そこでグラフ H に対して、rotation scheme

$(\pi'_1, \pi'_2, \dots, \pi'_p)$ を次のように定義する。ここで、 $t=1, 2, \dots, p$ について、 $\pi'_t: V'(t) \rightarrow V'(t)$ であり、 $t \neq i, j$ については $\pi'_t = \pi_t$ とする。さらに

$$\pi'_i(a) = \begin{cases} \pi_i(a) & a \neq k' \text{ のとき} \\ j & a = k' \text{ のとき} \\ k & a = j \text{ のとき} \end{cases}$$

および、

$$\pi'_j(a) = \begin{cases} \pi_j(a) & a \neq s' \text{ のとき} \\ i & a = s' \text{ のとき} \\ s & a = i \text{ のとき} \end{cases}$$

と定義する。

H の各辺を対称な弧の対で置き換えて得られるダイグラフを D' とする。置換 $\pi' : E(D') \rightarrow E(D')$ を $\pi'(v_m, v_n) = (v_n, v_{\pi'_n(m)})$ により定義する。このとき、 π' の軌道は、 R_i および R_j とは異なる π のすべての軌道 $(R_1, R_2, \dots, R_{i-1}, R_{i+1}, \dots, R_{j-1}, R_{j+1}, \dots, R_r)$ と、もう一つの軌道

$R : v_i \rightarrow v_j \rightarrow v_s \rightarrow \dots \rightarrow v_s \rightarrow v_j \rightarrow v_i \rightarrow v_k \rightarrow \dots \rightarrow v_k \rightarrow v_i$ から成っている。こうして、 π' は $r-1$ 個の軌道を持ち、対応する H の 2-胞体埋め込みは $r-1$ 個の領域 $R_1, R_2, \dots, R_{i-1}, R_{i+1}, \dots, R_{j-1}, R_{j+1}, \dots, R_r, R$ をもつ。さらに、 v_i と v_j は R の境界上にある。 $p-q+r=2-2h$ であるから、 $p-(q+1)+(r-1)=2-2(h+1)$ であり、 H は S_{h+1} 上への 2-胞体埋め込み可能である。したがって、(1) が成り立つ。

(2) $R_i = R_j$ とする。軌道 $R_i (= R_j)$ は、

$$R_i : v_i \rightarrow v_k \rightarrow \dots \rightarrow v_s \rightarrow v_j \rightarrow v_s \rightarrow \dots \rightarrow v_k \rightarrow v_i$$

と表せる ($v_i v_j \notin E(G)$ であるので、 v_i と v_j は R_i で連続して現れない)。したがって、

$$\pi_i(k') = k \text{ かつ } \pi_j(s') = s$$

である。再びグラフ $H = G + v_i v_j$ を考えて、 $t=1, 2, \dots, p$ について、

$$V'(t) = \{v \mid v, v_t \in E(H)\}$$

および rotation scheme $(\pi'_1, \pi'_2, \dots, \pi'_p)$ をここでも定義する。ここで、 $t=1, 2, \dots, p$ について、 $\pi'_t : V'(t) \rightarrow V'(t)$ であり、 $t \neq i, j$ については、 $\pi'_t = \pi_t$ とする。また、

$$\pi'_i(a) = \begin{cases} \pi_i(a) & a \neq k' \text{ のとき} \\ j & a = k' \text{ のとき} \\ k & a = j \text{ のとき} \end{cases}$$

および、

$$\pi'_j(a) = \begin{cases} \pi_j(a) & a \neq s' \text{ のとき} \\ i & a = s' \text{ のとき} \\ s & a = i \text{ のとき} \end{cases}$$

と定義する。

再び、 H の各辺を対称な弧の対で置き換えて得られるダイグラフを D' とし、置換 $\pi' : E(D') \rightarrow E(D')$ を $\pi'(v_m, v_n) = (v_n, v_{\pi'_n(m)})$ により定義する。 π' の軌道は R_i とは異なる π のすべての軌道

$(R_1, R_2, \dots, R_{i-1}, R_{i+1}, \dots, R_r)$ と、次の軌道

$$R' : v_i \rightarrow v_j \rightarrow v_s \rightarrow \dots \rightarrow v_k \rightarrow v_i$$

$$R'' : v_j \rightarrow v_i \rightarrow v_k \rightarrow \dots \rightarrow v_s \rightarrow v_j$$

から成っている。したがって、 π' は $r+1$ 個の軌道を持ち、得られた H の 2-胞体埋め込みは $r+1$ 個の領域 $R_1, R_2, \dots, R_{i-1}, R_{i+1}, \dots, R_r, R', R''$ をもっている。さらに v_i と v_j はどちらも R' と R'' の両方の境界に属する。ここで、 $p-q+r=2-2h$ であるから、 $p-(q+1)+(r+1)=2-2h$ であることになり、 H は S_h 上へ 2-胞体埋め込み可能である。したがって、(2) が成り立つ。■

命題 2. 4 の証明

$G=(V, E)$ を 2-因子をもつ連結 (p, q) グラフとし、 $G'=(V, E')$ を G の部分グラフで、2-正則グラフ (ただし、 G' は k 個の成分からなるとする) であるとする。このとき、次のように、ある種数の曲面上に G の 1-埋め込みを構成する。

まず、 G' を球面 S_0 上に埋め込み、 $E-E'$ の適当な $k-1$ 本の辺を用いて G' の k 個の成分を連結する。今できたグラフを $G''=(V, E'')$ とすると、これは G'' の球面上への 1-埋め込みを表している。この埋め込みにおいて、全ての頂点を覆う領域を R_0 とする (図 2. 1 参照)。

ここで、 $G''=H_0$ 、 $E-E''=\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ とし、 H_0 (すなわち G'') に辺 e_i を順に付加していき、 $H_{i+1}=H_i+e_{i+1}$ ($0 \leq i \leq n-1$) とする。すなわち、 $H_n=G$ である。

この i に関する帰納法により、ある曲面 S 上に H_i が 1-埋め込み可能であることを示す。

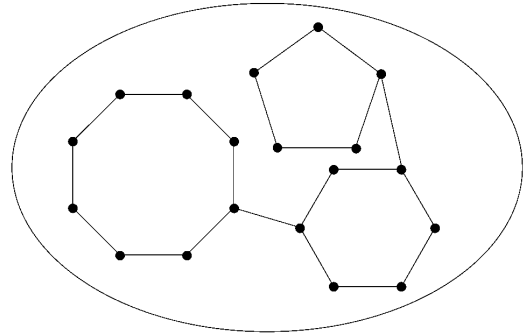


図 2. 1 球面上の G'' ($k=3$ の場合)

$i=0$ のときは前述のように、球面上に 1-埋め込み可能である。

$i \geq 0$ に対して、 H_i の曲面 S_h 上への 1-埋め込みで、 r 個の領域 $R_0, R_1, R_2, \dots, R_{r-1}$ をもつものが存在し、しかも $e_{i+1}=uv$ (u と v は H_i において非隣接点) とし、頂点 u と v はそれぞれ領域 R_u および R_v (ただし、 $R_u, R_v \neq R_0$) の境界上にあるものとする。このとき、補題 2. 5 により、

(1) $R_u \neq R_v$ ($u < v$ と仮定する) ならば、曲面 S_{h+1} 上への $H_{i+1}(=H_i+e_{i+1})$ の 2-胞体埋め込みで、 $r-1$ 個の領域 $R_0, R_1, R_2, \dots, R_{u-1}, R_{u+1}, \dots, R_{v-1}, R_{v+1}, \dots, R_{r-1}, R$ をもつものが存在して、頂点 u と v は同じ領域 R の境界上にある。したがって、この埋め込みにおいて領域

R_0 がすべての頂点を覆っているので、 H_{i+1} は S_{h+1} 上に 1 - 埋め込み可能である。

(2) $R_u = R_v$ ならば、曲面 S_h 上への $H_{i+1} (= H_i + e_{i+1})$ の 2 - 胞体埋め込みで、 $r+1$ 個の領域 $R_0, R_1, R_2, \dots, R_{u-1}, R_{u+1}, \dots, R_{r-1}, R', R$ をもつものが存在して、頂点 u と v はどちらも 2 つの異なる領域 R', R'' の境界上にある。したがって、この埋め込みにおいて領域 R_0 がすべての頂点を覆っているので、 H_{i+1} は S_h 上に 1 - 埋め込み可能である。

ゆえに、グラフ $G (= H_n)$ の 1 - 種数は存在する。■

この命題 2. 4 より、次の 2 つの系が得られる。

系 2. 6

ハミルトングラフの 1 - 種数は存在する。

証明

ハミルトン閉路は 2 - 因子である。

したがって、命題 2. 4 より 1 - 種数は存在する。■

系 2. 7

橋辺をもたない 3 - 正則グラフの 1 - 種数は存在する。

証明

命題 1. 1 より、橋辺をもたないグラフは、1 - 因子と 2 - 因子の辺和で表せる。

したがって、命題 2. 4 よりこのグラフの 1 - 種数は存在する。■

命題 2. 8

次の (1) と (2) は同値である。

- (1) 任意の連結グラフに対して 1 - 種数は存在する。
- (2) 任意の連結グラフは、すべての辺を境界上を含む (1 つの) 領域が存在するように埋め込み可能である。

証明

任意の連結グラフは、ある種数の曲面上に 1 - 埋め込み可能であるとする。連結な (p, q) グラフ G があり、 G の辺を e_1, e_2, \dots, e_q とする。 G の各辺 $e_i (1 \leq i \leq q)$ 上に、1 つずつ新しく頂点 v_i を加えて、 e_i を 2 本の辺 e'_i と e''_i に細分してできるグラフを G' とする。すなわち、 G' は位数 $p+q$ で大きさ $2q$ の連結グラフである。仮定より、 G' はある種数の曲面 S 上に 1 - 埋め込み可能である。したがって、 G' を曲面 S 上に 1 - 埋め込みしたときの、 G' のすべての $(p+q)$ 個の頂点を覆う領域を R とする。この埋め込みから、 G' の頂点 v_1, v_2, \dots, v_q を除き、 G' において頂点 $v_i (1 \leq i \leq q)$ に隣接していた 2 本の辺 e'_i と e''_i を合わせて再び 1 本の辺 $e_i (1 \leq i \leq q)$ と見なすと、曲面 S 上の G の埋め込みが得られるが、(G' における) 領域 R が G のすべての (q) 本の辺を覆っている。したがって、任意の連結グラフは、すべての辺を境界上を含む (1 つの) 領域が存在するように埋め込み可能である。

逆に、任意のグラフ G に対して、すべての辺を境界上に

含む領域 R が存在するように、 G をある曲面上に埋め込み可能であるとする。このとき、領域 R の境界上には G のすべての頂点が存在し、したがって、 G は 1 - 埋め込み可能、すなわち G の 1 - 種数は存在する。■

§ 2. 完全グラフと完全 2 部グラフの 1 - 種数

定理 2. 9

完全グラフの 1 - 種数は、

$$r_1(K_p) = \left\lceil \frac{(p-2)(p-3)}{12} \right\rceil \quad (p \geq 3)$$

で与えられる。

この定理の証明は、後に示すように「 \geq 」は命題 2. 2 により簡単に示せるが、「 \leq 」については実際にこの種数の曲面上に K_p を 1 - 埋め込みできる事を示さなければならない。そこで、定理 1. 4 より $r(K_{p+1}) = r_1(K_p)$ であるから、種数 $r(K_{p+1})$ の曲面上の K_{p+1} の埋め込みから 1 つの頂点を除いて種数 $r_1(K_p)$ の曲面上の K_p の 1 - 埋め込みが得られるように思える。しかし、この方法で得られる埋め込みは図 2. 2 に示すように 2 - 胞体埋め込みでない場合がある。図 2. 2 は、7 個の頂点からなるグラフをトーラス上へ埋め込んだ最小埋め込みで、中央の頂点 v は他のすべての頂点と隣接している。この埋め込みから頂点 v を除いた場合、確かに中央の (v が含まれていた) 領域は 6 個すべての頂点を境界上にもっているが、この領域は 2 - 胞体ではない。このように、ただ単に 1 つの頂点を取り除いて 1 - 埋め込みが得られるというものではない。そこで、定理 2. 9 の「 \leq 」を証明するために次の 2 つの補題を用いる。

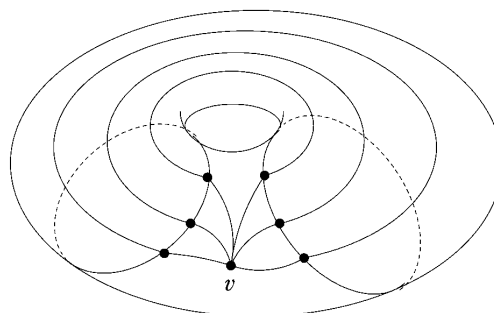


図 2. 2

補題 2. 10

連結な (p, q) グラフ G が、ある曲面上に 2 - 胞体埋め込みされているとする。いま、特定の頂点を v_p とし、その次数が $r (\leq p-1)$ であり、 v_p の隣接点に対して反時計回りに順に v_1, v_2, \dots, v_r とラベルを付ける。すなわち、頂点 v_p の rotation が、

$$\pi_p = (1, 2, \dots, r)$$

で表されているとする。

このとき、頂点 v_p が r 個の三角形領域の境界上にあるための必要十分条件は、頂点 v_1, v_2, \dots, v_r の rotation が、

$$\begin{aligned}
 \pi_1 &= (2, p, r, \mu_1) \\
 \pi_2 &= (3, p, 1, \mu_2) \\
 \pi_3 &= (4, p, 2, \mu_3) \\
 &\dots\dots\dots \\
 \pi_i &= (i+1, p, i-1, \mu_i) \\
 &\dots\dots\dots \\
 \pi_r &= (1, p, r-1, \mu_r)
 \end{aligned} \tag{2. 1}$$

で表されることである (ただし、 $\mu_i (1 \leq i \leq r)$ は p および $i-1, i, i+1 \pmod{r}$ (ただし、 $0=r, r+1=1$ と考える) を除く 1 から r までの数の、ある順列を表すものとする)。

証明

頂点 v_p の rotation が、

$$\pi_p = (1, 2, \dots, r)$$

で表されているとする。このとき、頂点 p を含む領域に便宜上、図 2. 3 のように R_1, R_2, \dots, R_r とラベルをつける (ただし、 $j \neq i$ に対して、 $R_j = R_i$ であるかもしれない)。

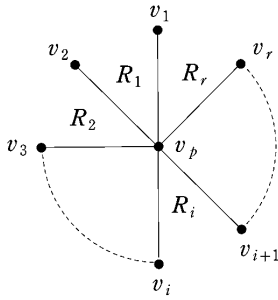


図 2. 3 頂点 v_p の近傍

① 頂点 v_1, v_2, \dots, v_r の rotation が、式 (2. 1) のように与えられているとする。このとき、領域 (軌道) $R_i (1 \leq i \leq r)$ は

$$\begin{aligned}
 R_1 &: v_1 \rightarrow v_p \rightarrow v_2 \rightarrow v_1 \\
 R_2 &: v_2 \rightarrow v_p \rightarrow v_3 \rightarrow v_2 \\
 &\dots\dots\dots \\
 R_i &: v_i \rightarrow v_p \rightarrow v_{i+1} \rightarrow v_i \\
 &\dots\dots\dots \\
 R_r &: v_r \rightarrow v_p \rightarrow v_1 \rightarrow v_r
 \end{aligned}$$

である。したがって、頂点 v_p が含まれる領域は r 個で、すべて三角形領域である。

② 頂点 v_p が r 個の三角形領域の境界上にあるとする。このとき、 v_1, v_2, \dots, v_r の中に、rotation が (2. 1) で表されない頂点 $i (1 \leq i \leq r)$ が存在するとする。

a) $\pi_i = (j, p, v_i)$ のとき、(ただし $j \neq i+1, v_i$ は i, j, p を除く数のある順列を表すものとする (図 2. 4(a))。このとき、領域 R_i は

$$R_i : \dots \rightarrow v_i \rightarrow v_p \rightarrow v_{i+1} \rightarrow \dots$$

であるが、この先頭の頂点 v_i の前に来る頂点は

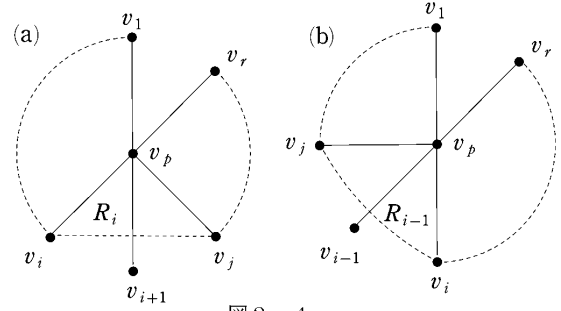


図 2. 4

$$\pi_i^{-1}(v_p) = j \neq i+1$$

であるから、この領域は三角形ではない。

ゆえに仮定に矛盾する。

b) $\pi_i = (p, j, v_i)$ のとき、(ただし、 $j \neq i-1, v_i$ は i, j, p を除く数のある順列を表すものとする (図 2. 4(b))。

このとき、領域 R_{i-1} は

$$R_{i-1} : v_{i-1} \rightarrow v_p \rightarrow v_i \rightarrow v_j \rightarrow \dots$$

となり、 $j \neq i-1$ であるから、この領域は三角形ではない。

ゆえに仮定に矛盾する。

以上から、rotation scheme $(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_r)$ は、(2. 1) のように表されなければならない。■

補題 2. 1 1

連結な (p, q) グラフ $G = (V, E)$ が、種数 n の曲面 S_n 上に 2-胞体埋め込みされているとする。このとき、

$$\exists v \in E(G)$$

$$\text{s.t. (1) } \deg(v) = p-1$$

(2) v は $p-1$ 個の三角形領域の境界上にあるならば、グラフ $G-v$ は連結で、曲面 S_n 上に 1-埋め込み可能である。

証明

$v = v_p, \pi_p = (1, 2, \dots, p-1)$ としても一般性は失われない。

このとき、補題 2. 1 0 より頂点 v_1, v_2, \dots, v_{p-1} に対する rotation は、

$$\begin{aligned}
 \pi_1 &= (2, p, r, \mu_1) \\
 \pi_2 &= (3, p, 1, \mu_2) \\
 \pi_3 &= (4, p, 2, \mu_3) \\
 &\dots\dots\dots \\
 \pi_i &= (i+1, p, i-1, \mu_i) \\
 &\dots\dots\dots \\
 \pi_r &= (1, p, r-1, \mu_r)
 \end{aligned} \tag{2. 2}$$

(ただし、 $\mu_i (1 \leq i \leq r)$ は p および $i-1, i, i+1 \pmod{r}$ を除く 1 から r までの数の、ある順列を表すものとする) で表されなければならない。したがって、グラフ $G-v_p$ の頂点 v_1, v_2, \dots, v_{p-1} の rotation を

$$\begin{aligned}
 \pi'_1 &= (2, r, \mu_1) \\
 \pi'_2 &= (3, 1, \mu_2) \\
 \pi'_3 &= (4, 2, \mu_3)
 \end{aligned}$$

$$\pi'_i = (i+1, i-1, \mu_i)$$

$$\pi'_r = (1, r-1, \mu_r)$$

(ただし、 $\mu_i (1 \leq i \leq r)$ は (2. 2) における μ_i と同じものとする) と定義すれば、1つの領域は、

$$v_{p-1} \rightarrow \cdots \rightarrow v_3 \rightarrow v_2 \rightarrow v_1 \rightarrow v_{p-1}$$

となり、 $G-v_p$ のすべての頂点を境界上に含む (図 2. 5)

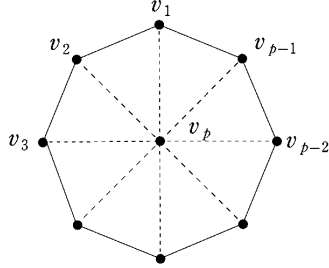


図 2. 5 補題 2. 10 の仮定を満たす頂点 v_p

また、 G の辺の数を q 、種数 n の曲面における領域の個数を r とすると、Euler の公式より

$$\begin{aligned} p - q + r &= 2 - 2n \\ \therefore n &= \frac{-p + q - r + 2}{2} \end{aligned}$$

が成り立つ。そこで、今定義した rotation scheme $(\pi'_1, \pi'_2, \dots, \pi'_{p-1})$ によるグラフ $G-v_p$ の埋め込みは、頂点の数 $p-1$ 、辺の数 $q-p$ 、領域の数 $r-p+1$ である。

(\because グラフ $G-v_p$ の rotation scheme を作る際、元のグラフ G の rotation scheme から頂点 v_p を除いただけであるから、グラフ G において頂点 v_p を含んでいなかった領域はそのまま $G-v_p$ の領域になっている。そのため、それらの領域は 2-胞体であり、グラフ $G-v_p$ も連結である。)

このときの曲面の種数を n' とすると、

$$\begin{aligned} (p-1) - (q-p) + (r-p+1) &= 2 - 2n' \\ \therefore n' &= \frac{-p + q - r + 2}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore n = n'$$

したがって、グラフ $G-v_p$ は種数 n の曲面上に 1-埋め込み可能である。■

定理 2. 9 の証明

① K_p は完全グラフであるから、

$$q = {}_pC_2 = \frac{p(p-1)}{2}$$

である。したがって、命題 2. 2 に、この q の値と $d=1$ を代入して整理すると、

$$r_1(K_p) \geq \frac{(p-2)(p-3)}{12}$$

を得る。ゆえに、 $r_1(K_p)$ は非負整数であることから、

$$r_1(K_p) \geq \left\lceil \frac{(p-2)(p-3)}{12} \right\rceil$$

が成り立つ。

② 次に、逆向きの不等式を示すために、実際に種数

$$r_1(K_p) = \left\lceil \frac{(p-2)(p-3)}{12} \right\rceil = r(K_{p+1})$$

の曲面上に K_p の 1-埋め込みを構成する。

$p=3, 4, 5$ の場合については容易に図に描いて確かめられるので、 $p \geq 6$ について考えることにする。完全グラフ定理 (定理 1. 4)

$$r(K_p) = \left\lceil \frac{(p-3)(p-4)}{12} \right\rceil$$

より、

$$r(K_p) \leq \frac{(p-3)(p-4)+10}{12} = \frac{p^2-7p+22}{12}$$

($\because (p-3)(p-4)$ は偶数だから)

このときの領域の個数を r として、この式と $q = {}_pC_2$ を Euler の公式に代入すると、

$$p - \frac{p(p-1)}{2} + r \geq 2 - 2 \times \frac{p^2-7p+22}{12}$$

$$\therefore r \geq \frac{p^2-p-5}{3} \quad (2. 3)$$

r 個の領域がすべて 3 本以上の辺を含むことから、

$2q \geq 3r$ であり、(2. 3) と $q = {}_pC_2$ より、

$$0 \leq 2q - 3r \leq 5$$

となる。したがって、種数 $r(K_p)$ の曲面上に K_p を埋め込んだ場合、すべての領域が三角形領域であると考えれば辺が高々 5 個余ることになる。すなわち 4 本以上の辺を含む領域が高々 5 個あることになる。ゆえに、 K_p を種数 $r(K_p)$ の曲面上に埋め込んだ場合、 $p \geq 21$ のときは、補題 2. 10 の仮定を満たす頂点 v が存在する。($\because 2q-3r=5$ すなわち r 個すべての領域が 3 角形領域であると考えたとき、頂点が 5 個余ったとする。このとき、3 角形でない領域が

領域	3角形	4角形	5角形	6角形	7角形	8角形	λ
(1)	$r-5$	5	0	0	0	0	20
(2)	$r-4$	3	1	0	0	0	17
(3)	$r-3$	1	2	0	0	0	14
(4)	$r-4$	2	0	1	0	0	14
(5)	$r-2$	0	1	1	0	0	11
(6)	$r-2$	1	0	0	1	0	11
(7)	$r-1$	0	0	0	0	1	8

表 2. 1

高々 5 個となり、表 2. 1 の場合が考えられる。ここで、 λ は 4, 5, 6, 7, 8 角形がすべて互いに素であるとき、それらの境界上にある頂点の個数である。したがって、高々 20 個の頂点が三角形でない領域の境界上にある可能性がある。ゆえに、 $p \geq 21$ のときは、補題 2. 10 の仮定を満たす頂点 v が少なくとも 1 つは存在することになる。)

したがって、 $K_p - v = K_{p-1} (p \geq 21)$ は種数 $r(K_p)$ の曲面上に 1-埋め込み可能である。

$$\therefore r_1(K_p) \leq \left\lceil \frac{(p-2)(p-3)}{12} \right\rceil \quad (p \geq 20)$$

p	$p+1$	$\gamma(K_{p+1})$	q	r	δ
6	7	1	21	14	0
7	8	2	28	18	2
8	9	3	36	23	3
9	10	4	45	29	3
10	11	5	55	36	2
11	12	6	66	44	0
12	13	8	78	51	3
13	14	10	91	59	5
14	15	11	105	70	0
15	16	13	120	80	0
16	17	16	136	89	5
17	18	18	153	101	3
18	19	20	171	114	0
19	20	23	190	126	2

表 2. 2

次に、 $6 \leq p \leq 19$ について考える。このときも、 $p \geq 20$ の場合と同じように K_{p+1} の埋め込みから 1 つの頂点を除く方針で考える。 K_{p+1} を種数 $\gamma(K_{p+1})$ の曲面上に埋め込んだときの領域の数 r 、辺の数 q 、そのときの $\delta = 2q - 3r$ (r 個の領域がすべて三角形領域であると考えたときの余った辺の数) は、表 2. 2 のようになる。この表 2. 2 から、 $p=6, 10, 11, 12, 14, 15, 17, 18, 19$ の場合は、補題 2. 1 1 の仮定を満たす頂点 v が存在し、 $K_{p+1} - v = K_p$ は種数 $\gamma(K_{p+1})$ の曲面上に 1 - 埋め込み可能である。

$$\therefore \gamma_1(K_p) \leq \left\lceil \frac{(p-2)(p-3)}{12} \right\rceil$$

($p=6, 10, 11, 12, 14, 15, 17, 18, 19$)

この他、 $p=7, 8, 9, 13, 16$ の場合は、実際に種数 $\gamma_1(K_p)$ の曲面上への 1 - 埋め込みを表す rotation scheme を構成することができた。

a) K_7 の種数 2 の曲面への 1 - 埋め込みを表す rotation scheme

$$\begin{aligned} \pi_1 &= (7, 6, 5, 2, 4, 3) \\ \pi_2 &= (4, 1, 5, 3, 6, 7) \\ \pi_3 &= (1, 7, 4, 6, 2, 5) \\ \pi_4 &= (6, 3, 7, 5, 1, 2) \\ \pi_5 &= (3, 2, 1, 6, 4, 7) \\ \pi_6 &= (5, 1, 7, 2, 3, 4) \\ \pi_7 &= (5, 4, 3, 2, 6, 1) \end{aligned}$$

この rotation scheme によって表される K_7 は、すべての頂点を含む 8 個の頂点を境界上にもつ領域と 1 個の 4 角形の領域と 10 個の 3 角形の領域を含み、Euler の公式からこの曲面の種数は 2 となる。

b) K_8 の種数 3 の曲面への 1 - 埋め込みを表す rotation scheme

$$\begin{aligned} \pi_1 &= (7, 6, 5, 2, 4, 3, 8) \\ \pi_2 &= (4, 1, 5, 3, 6, 7, 8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi_3 &= (1, 7, 4, 6, 2, 5, 8) \\ \pi_4 &= (6, 3, 7, 5, 1, 2, 8) \\ \pi_5 &= (3, 2, 1, 6, 4, 7, 8) \\ \pi_6 &= (5, 1, 7, 2, 3, 4, 8) \\ \pi_7 &= (5, 4, 3, 2, 6, 1, 8) \\ \pi_8 &= (6, 4, 2, 1, 3, 5, 7) \end{aligned}$$

この rotation scheme によって表される K_8 は、すべての頂点を含む 11 個の頂点を境界上にもつ領域と 15 個の 3 角形の領域を含み、Euler の公式からこの曲面の種数は 3 となる。

c) K_9 の種数 4 の曲面への 1 - 埋め込みを表す rotation scheme

$$\begin{aligned} \pi_1 &= (2, 7, 3, 8, 6, 5, 9, 4) \\ \pi_2 &= (3, 7, 1, 4, 8, 6, 9, 5) \\ \pi_3 &= (4, 7, 2, 5, 8, 1, 9, 6) \\ \pi_4 &= (5, 7, 3, 6, 8, 2, 1, 9) \\ \pi_5 &= (6, 7, 4, 8, 3, 2, 9, 1) \\ \pi_6 &= (7, 5, 1, 8, 4, 3, 9, 2) \\ \pi_7 &= (1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 8) \\ \pi_8 &= (2, 4, 6, 1, 3, 5, 7, 9) \\ \pi_9 &= (4, 1, 5, 2, 6, 3, 8, 7) \end{aligned}$$

この rotation scheme によって表される K_9 は、すべての頂点を含む 12 個の頂点を境界上にもつ領域と 20 個の 3 角形の領域を含み、Euler の公式からこの曲面の種数は 4 となる。

d) K_{13} の種数 10 の曲面への 1 - 埋め込みを表す rotation scheme

$$\begin{aligned} \pi_1 &= (7, 11, 6, 8, 3, 9, 10, 13, 4, 12, 2, 5) \\ \pi_2 &= (8, 4, 9, 7, 6, 3, 13, 5, 1, 12, 11, 10) \\ \pi_3 &= (9, 1, 8, 10, 5, 11, 13, 2, 6, 12, 4, 7) \\ \pi_4 &= (10, 6, 11, 9, 2, 8, 5, 13, 7, 3, 12, 1) \\ \pi_5 &= (11, 3, 10, 7, 1, 2, 13, 4, 8, 12, 6, 9) \\ \pi_6 &= (8, 1, 11, 4, 10, 7, 13, 9, 5, 12, 3, 2) \\ \pi_7 &= (1, 5, 2, 9, 3, 4, 13, 6, 10, 12, 8, 11) \\ \pi_8 &= (2, 10, 3, 1, 6, 9, 13, 11, 7, 12, 5, 4) \\ \pi_9 &= (3, 7, 2, 4, 11, 5, 6, 13, 8, 12, 10, 1) \\ \pi_{10} &= (4, 5, 3, 8, 2, 11, 13, 1, 9, 12, 7, 6) \\ \pi_{11} &= (5, 9, 4, 6, 1, 7, 8, 13, 10, 2, 12, 3) \\ \pi_{12} &= (2, 1, 4, 3, 6, 5, 8, 7, 10, 9, 11, 13) \\ \pi_{13} &= (10, 11, 8, 9, 6, 7, 4, 5, 2, 3, 1, 12) \end{aligned}$$

この rotation scheme によって表される K_{13} は、すべての頂点を含む 13 個の頂点を境界上にもつ領域と 8 角形領域 1 個と 45 個の 3 角形の領域を含み、Euler の公式からこの曲面の種数は 10 となる。

e) K_{16} の種数 16 の曲面への 1 - 埋め込みを表す rotation scheme

$$\begin{aligned} \pi_1 &= (14, 10, 12, 6, 13, 8, 11, 4, 9, 16, 2, 15, 3, 7, 5) \\ \pi_2 &= (11, 13, 4, 8, 6, 12, 5, 10, 7, 14, 9, 15, 1, 16, 3) \\ \pi_3 &= (4, 15, 11, 8, 12, 7, 1, 2, 16, 10, 13, 9, 14, 5, 6) \end{aligned}$$

$\pi_4=(2, 13, 9, 1, 11, 14, 7, 12, 16, 5, 15, 3, 6, 10, 8)$
 $\pi_5=(3, 14, 1, 7, 11, 9, 8, 13, 10, 2, 12, 15, 4, 16, 6)$
 $\pi_6=(7, 15, 14, 11, 10, 4, 3, 5, 16, 13, 1, 12, 2, 8, 9)$
 $\pi_7=(5, 1, 3, 12, 4, 14, 2, 10, 16, 8, 15, 6, 9, 13, 11)$
 $\pi_8=(6, 2, 4, 10, 14, 12, 3, 11, 1, 13, 5, 15, 7, 16, 9)$
 $\pi_9=(10, 15, 2, 14, 3, 13, 7, 6, 8, 16, 1, 4, 5, 11, 12)$
 $\pi_{10}=(8, 4, 6, 7, 2, 5, 13, 3, 16, 11, 15, 9, 12, 1, 14)$
 $\pi_{11}=(5, 9, 7, 13, 2, 6, 14, 4, 1, 8, 3, 15, 10, 16, 12)$
 $\pi_{12}=(13, 15, 5, 2, 6, 1, 10, 9, 11, 16, 4, 7, 3, 8, 14)$
 $\pi_{13}=(11, 7, 9, 3, 10, 5, 8, 1, 6, 16, 14, 15, 12, 4, 2)$
 $\pi_{14}=(12, 8, 10, 1, 5, 3, 9, 2, 7, 4, 11, 6, 15, 13, 16)$
 $\pi_{15}=(1, 2, 9, 10, 11, 3, 4, 5, 12, 13, 14, 6, 7, 8, 16)$
 $\pi_{16}=(3, 2, 1, 9, 8, 7, 14, 13, 6, 5, 4, 12, 11, 10, 15)$

この rotation scheme によって表される K_{16} は、すべての頂点を含む 21 個の頂点を境界上にもつ領域と 73 個の 3 角形の領域を含み、Euler の公式からこの曲面の種数は 16 となる。

以上から、

$$r_1(K_p) = \left\lceil \frac{(p-2)(p-3)}{12} \right\rceil \quad (p \geq 3)$$

が成り立つ。■

次に、完全 2 部グラフ $K(m, n) (m \geq n)$ の 1 - 種数について考えてみることにする。 $K(m, n)$ を種数 g の曲面上に 1 - 埋め込みしたときの領域の個数を r とすると、Euler の公式より、

$$(m+n) - mn + r = 2 - 2g \quad (2.4)$$

が成り立つ。このとき、1 - 埋め込みを意味する特定の 1 つの領域の境界上には $2m$ 本の辺があり (\because 2 部グラフの各領域上には偶数本の辺がある)、また、他の $r-1$ 個の領域上には少なくとも 4 本の辺があるから

$$2m + 4(r-1) \leq 2mn \quad (=2|V|)$$

である。これを式 (2.4) に代入して整理すると、

$$g \geq \left\lceil \frac{(m-2)(n-1)}{4} \right\rceil$$

を得る。したがって、次のように予想できる。

予想 A

完全 2 部グラフ $K(m, n) (m \geq n \geq 2)$ の 1 - 種数は

$$r_1(K(m, n)) = \left\lceil \frac{(m-2)(n-1)}{4} \right\rceil$$

で与えられる。

この予想を証明するためには、完全グラフの場合と同様に、実際にこの種数の曲面上に $K(m, n)$ の 1 - 埋め込みを構成して、「 \leq 」を示せばよい。しかし、現在のところ証明できたのは、 $n=2, 3$ の場合と $n=4$ かつ $m \equiv 1, 2 \pmod{4}$ の場合のみである。

命題 2. 1 2

- (1) $n=2, 3$ のとき、予想 A は正しい。
- (2) $n=4$ のとき、 $\forall m \equiv 1, 2 \pmod{4}$ に対して予想 A は正しい。

§ 3. n - 立方体の d - 種数

定理 2. 1 3

n - 立方体の 1 - 種数は

$$r_1(Q_n) = (n-3) \cdot 2^{n-3} + 1 \quad (n \geq 3)$$

で与えられる。

定理 2. 1 4

n - 立方体の d - 種数は

$$r_d(Q_n) = (n-3) \cdot 2^{n-3} + \left\lceil \frac{2-d}{2} \right\rceil \quad (n \geq 3)$$

で与えられる。

命題 2. 1 2、定理 2. 1 3、定理 2. 1 4 の証明については、次回の紀要において報告する。

References

- [BCL] Behzad, M. Chartrand, G. and Lesniak - Foster, L.
Graphs and Digraphs (1981)
日本語訳 グラフとダイグラフの理論 秋山仁・西関隆夫訳 (共立出版)
- [BH] Beineke, L. W. and Harary, F.
The genus of the n -cube. Canad. J. Math. 17 (1965)
- [D] Duke, R. A.
The genus, regional number, and Betti number of graph. Canad. J. Math. 18 (1966)
- [KRW] Kronk, H. V., Ringeisen, R. D. and White, A. T. On 2-cell imbeddings of complete n -partite graphs. Colloq. Math. 36 (1976)
- [NSW] Nordhaus, E. A.
On complementary graphs. Amer. Math. Monthly 63 (1956)
- [P] Petersen, J.
Die Theorie der regulären Graphs. Acta Math. 15 (1891)
- [R1] Ringeisen, R. D.
Determining all compact orientable 2-manifolds upon which $K(m, n)$ has 2-cell imbeddings. J. Combination Theory 12B (1972)
- [R2] Ringel, G.
Über drei kombinatorische Probleme an n -dimensionalen Würfeln und Würfelgitter. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 20 (1955)
- [R3] Ringel, G.
Das Geschlecht des vollständigen paaren Graphen. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 28 (1965)
- [R4] Ringel, G.
Map Color Theorem. Springer - Verlag, Berlin (1974)
- [Y] Youngs, J. W. T.
Minimal imbeddings and the genus of graph. J. Math. 12 (1963)
- [Z] Zaks, J.
The maximum genus of cartesian products of graphs. Canad. J. Math. 26 (1974)