大和大学　研究紀要　第２巻　2016 年３月　pp.27 ～ 30

結び目理論を初等中等教育に取り入れる試みについて
－大阪府下の学校での実践事例を中心に－

On an attempt to incorporate knot theory to elementary and secondary education
－ Mainly in Practice at school in Osaka Prefecture －

松　本　宗　久*
MATSUMOTO　Munehisa

要　　旨
「結び目理論」という位相幾何学の一分野は，近年その応用範囲が広がり，目覚ましい進歩が見られている。身近でありながら，数学的に深く興味深い題材であり，初等中等教育においても児童・生徒が，これまでと違った観点から数学的知見を得られると考えている。筆者はこれまで高校教員として「結び目理論」を取り入れた教育実践を行ってきた。今回はこれまでの実践を踏まえ，その経緯と新学習指導要領に関連した今後の展開について考察する。

Abstract
One field of topology called "knot theory" is, in recent years its application range is spread, has seen remarkable progress. It is familiar,but it is a mathematically deeply interesting subject, and for the students in elementary and secondary education, it is considered to obtain a mathematical knowledge from the point of view that was different from the past. We've been doing the education practice absorbing "knot theory" as a high school teacher ever. In this report, basig on the practice of the past, we consider the future development which is related to its history and the new course of study.

キーワード：位相幾何学　数学教育
keywords：Topology, Mathematical education

1. はじめに

結び目理論は幾何学における位相幾何学(トポロジー)の一分野として位置づけられている。誰もが知っている身近な題材でありながら，数学的に深く興味深い題材でもある。筆者らは，大阪市立大学の 21 世紀 COE プログラム“結び目を焦点とする広角度の数学拠点の形成”の教育活動の一環として初等中等教育において結び目理論を援用する方法について実践を取り入れながら取り組んできた。

今回は，結び目理論の概要を述べるとともに，これまでの教育活動の取り組みについて概観し，更に筆者が本学等で行った実践について述べる。そして，学習指導要領の改訂をふまえて，今後の展開について考察する。

2. 結び目理論の概要

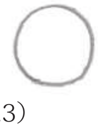
ここでは，理論について深入りすることなく，中・高校生を対象に提示した定義を中心に説明する。より詳しく知りたい場合は参考文献 [1)～3)] を参照してほしい。

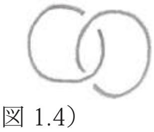
2.1 結び目（knot）とは

数学において，結び目（knot）とは，３次元空間内に置かれた自分自身と交わったり，接したりしていない１本のひもの状態をさす。（図１．１）
しかし，端が開いていると，理論上全ての結び目はほどけてしまい，直線状の１本のひもとなることができるので，結び目は両端を閉じたひもとして考える。（図１．２）この時，最も単純な輪の形をした結び目を自明な結び目と言う。（図１．３）また絡み目とは，２本以上の閉じたひもの結び目の集まりのことである。（図１．４）（結び目理論は，空間グラフとも密接な関係を持つが，ここではふれない）


（図 1.1）


（図 1.2）


（図 1.3）


（図 1.4）

* 大和大学教育学部教育学科（数学教育専攻）
平成 27 年９月 30 日受理

2.2 結び目理論（knot theory）とは

結び目理論とは以下の問題について数学的手法を用いて考える理論である。

（１）同型問題：　２つの結び目があるとき，それらが同型な結び目であるかどうか。言いかえると片方の結び目を変形していくと，もう一方の結び目にすることができるか。

（２）分類問題：　すべての結び目や絡み目を同型なものを除いて分類する。

初等中等教育では，特に（１）について考察する実践を多く行っている。これらの問題をわかりやすく説明するために「この結び目はほどけるか」や「２つの結び目は同じか」というように表現を言いかえて用いる場合もある。

2.3 結び目の射影図

結び目のような空間図形を平面上に表した図のことを射影図という。射影図では結び目の交点は一点であり，図に描く場合，上を通っているひもを実線でつなげて，下を通っているひもを切って表している。（図 1.1 他を参照）

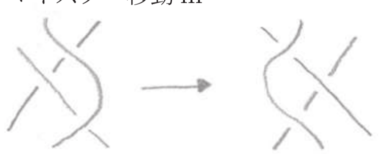
2.4 ライデマイスター移動

ドイツの数学者ライデマイスターは，同じ結び目の異なる射影図において，一方から他方へ，交点どうしの関係を変えるような操作を次の３通りであることを証明した。これらの変形操作をライデマイスター移動という。

ライデマイスター移動 I

ライデマイスター移動 II

ライデマイスター移動 III



2.5 結び目不変量と多項式

結び目の状態をある数や数式で表すことを考える場合，同じ結び目については同じ数や式で表される必要がある。このような考え方を結び目不変量という。結び目不変量を記述する多項式は，過去に様々な式が考案され，現在も探求されている。ここでは中等教育で利用したものを中心に代表的なものについて述べる。

2.5.1 方向付けをした結び目

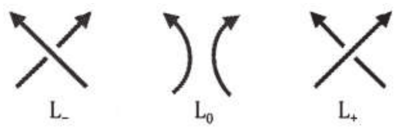
ある結び目について，結び目に沿って，一周する方向を決める。このとき，矢印をつけて向きを表す。これを向き付けられた結び目という。

（図 2.1）

2.5.2 スケイン関係式

３つの有向絡み目の射影図 L_-，L_0，L_+ について，射影図の結び目の成分上の１点の近傍が下図のように異なっており，それ以外の部分は一致しているとき，それら３つの射影図はスケイン関係にあるという。

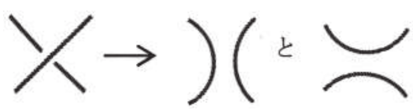
この状態で，射影図 L_-，L_0，L_+ に対応する多項式をそれぞれ fL_-，fL_0，fL_+ としたとき，それら３つの間で成立する関係式のことをスケイン関係式という。



（図 2.2）

2.5.4 カウフマンのブラケット多項式

図 2.2 の L+ について方向付けをせずに交点を Lo と，それを 90 度回転した２つの状態に分類すると，交点 n 個に対して 2^n の状態に分類することができる。これをある規則に従って足し上げていくことでできる多項式をカウフマンのブラケット多項式という。



（図 2.3）

2.5.5 ジョーンズ多項式

ブラケット多項式において，ライデマイスター移動による変形操作は不変であること数式で表すことによって表現された結び目の多項式をジョーンズ多項式という。

例えば図 2.1 の結び目のジョーンズ多項式は

$t+t^{3}+t^{-4}$ と表される。

3. 結び目理論を初等中等教育に取り入れる試み

筆者らは大阪教育大学の故岡森博和先生の元，校種や公私の垣根を越えて，過去 10 年以上に渡り結び目理論を初等中等教育に取り入れる教育実践を積み重ねてき

た。詳細は筆者の所属する研究会が作成した報告書[4)～5)]に詳しく述べられているので，ここではこれまでの取り組みについて全体の概略について目標と実践例について述べる。

ただし，結び目理論及び，その教材としての結び目を算数・数学で扱う試みは，現在のところ，小学生から高校生に至るまで，学習者が初めて経験する場合がほとんどである。そのため，現状では導入や目標，使用教材はどうしても重複する点もある。例えば，授業の導入については，どの年齢段階においても，具体的な結び目を提示したうえで「この結び目はほどけるか」などの，学習者の興味を引く工夫を行うことが多い。とはいえ，学年が上がるにつれて不変量や多項式を扱うなど，抽象度を増していき，数学的側面が強くなるような工夫も同時に行っている。

3.1 小学校における実践

目標：結び目を教材として利用して，空間図形の位置関係を想像したり，一部を変形する様子を想像できる。また，実物を見て，射影図で２次元上に表現したりすることができるようになる。

実践例：提示された結び目の射影図を見て，ひもを用いて再現できるか，等についての調査した結果を元に，主に中・高学年を対象とした教材開発を行った。ひもの素材として何を用いるかについて，何度も実験が行われた。形を変えたい場合とそのままで見せたい場合について，素材を使い分ける工夫を行い，特に後者では予め完成された結び目をプリンカップなどの透明な容器に入れて変形しないようにして渡す仕組みを開発した。近年は3D プリンタの利用も視野に入れて開発を行っている。

3.2 中学校における実践

目標：結び目を使って，空間図形の位置関係を想像したり，一部を変形する様子を想像したりすることができるようにする。

実践例：小学校での実践をもとに，絡み数や三彩色可能性など不変量を用いて結び目を考えることが出来るようなプリント教材を作成した。与えられた２つの結び目が同じかどうかを判別するための方法を論理的に考えることができるように工夫を行った。

3.3 高等学校における実践

目標：結び目で扱われている今までとは異なった新しい観点（不変量）の面白さを実感させる。また，自分なりに考えだした判別方法が不変量として妥当かどうかを調べることや既知の内容を追随し，発見学習を行うことも含めて，生徒の主体的な数学的活動を促す。

実践例：結び目を高校数学を用いて理解できる多項式で表すことができるかを，高校２年生や３年生を対象にして，一斉授業や，少人数の生徒を対象にした実践の中で試みた。高校生でも十分に理解できるように，様々な知識を与えて，その知識をもとにして，主体的に問題解決できる教材を考えた。

尚，筆者は以下のような実践を行った。

高校生を対象に，同じような形をした射影図についてほどけるか，そうでないかの認識調査やスケイン関係式を用いてのブラケット多項式やジョーンズ多項式を生徒自ら導出する。

3.4 その他

目標：博物館や，科学関係の催しで結び目という身近な題材であることを手がかりにして，結び目理論について多くの人達に知ってもらう。

実践例：主に小学生を対象に小学校で行った実践の導入部分を行い，裾野を広げることに注力した。

4. 本学オープンキャンパスにおける実践

前述した通り結び目理論を活用した体験学習は，誰でも知っている題材から数学に導入していける利点を利用して科学イベントや，オープンキャンパスなどにも利用されている。

筆者も本学の 2014 年度のオープンキャンパスにおいて数学教育専攻の体験授業の一環として『結び目の数学（この結び目はほどけるの？）』と題し，7/26 と 8/24 に 60 分ほどの授業を行った。

4.1 実践概要

授業時間は実質 40 ～ 50 分で，その際 A4 の資料１枚と美術用教材のモールを渡して，実際にモールで結び目を作ってもらいながら，問題を解かせていった。その際，教卓では洗濯機のホースを用いて作成した巨大な結び目の模型を使って演示を行った。その後，筆者が結び目理論の概略について，A4 の資料２枚を用いて「結び目とは？」「結び目理論とは？」「ジョーンズ多項式」などの項目をたてて，結び目理論の概略について解説を行った。

4.2 アンケートとその考察

参加した生徒に簡単なアンケートを実施した所，17 名から回答を得た。以下にそれを表にまとめたので記す。

アンケートを読むと「結び目理論」について全く知らなかったものの，今回の内容は理解でき，楽しく学べたことが見てとれた。　数学的な内容について深入りはしていないので，もっと深い内容について調べていけば当然結果は変わってくるであろうが，導入として生徒たちの興味を惹きつけることができたと言える。

「結び目理論」という数学のジャンルを知っていましたか？	
知っていた	0
聞いたことがある	2
あまり知らなかった	2
全く知らなかった	13

内容は理解できましたか？	
よく理解できた	3
まぁ理解できた	14
あまり理解できなかった	0
全く理解できなかった	0

内容は楽しかったですか？	
楽しかった	8
まぁ楽しかった	9
あまり楽しくなかった	0
楽しくなかった	0

また，筆記による回答については以下のようであった。

『結び目と数学の関連性についての指摘』
・結び目なんて数学と関係ないと思ってたけど，意外と関係があってびっくりした。
・鏡で写したら反対になる形でも，同じになるものと違うものがあるということがおもしろかったです。
『結び目理論の数学的な面白さについて』
・また機会があれば研究してみたいと思いました。
・苦にならない勉強だったのでまたやってみたいと思いました。
・普段考えたりしないことを勉強して，難しかったが，発見できたりして良かった。
『ひもという言葉と関連付けた回答』
・超ひも理論という話も聞きたい！　名前が結び目理論と似てるから

5. 今後に向けて

中央教育審議会　教育課程部会では 2015 年 6 月の配布資料 [6)] の中で，理数教育に関する現状と課題について『高校生において，自主性，主体性のある研究，探究活動が重要』と指摘し，『ＳＳＨにおける取組み事例なども参考にしつつ，数学と理科の知識や技能を総合的に活用して主体的な探究活動を行う新たな選択科目も検討』するとしている。その探求テーマの例として『(５) 科学や数学を発展させた原理・原則に関する研究』では『代数方程式の解の公式の研究』などが挙げられている。筆者らの研究会では，こうした社会的背景をふまえ，これまでの実践研究をどのように取り入れていくのがふさわしいか検討しているところである。

過去には，平成 18 年度スーパーサイエンスハイスクール全国生徒研究発表会において，天王寺高等学校が「メビウスの帯についての考察」を行い，文部科学大臣奨励賞を受賞している。これは大阪市立大学との高大連携講座において結び目理論を学んだことが契機になっており，研究会の先生が指導されたこともあって，目標となりうる事例であろう。

今後は，筆者らが高等学校での実践において行った多項式の定義について自ら発見させる学習について指導案を検討し，多くの学校において実践を行ってもらえるような工夫を行うことが望ましいと考えられるので，その方向で検討を重ねていきたい。

謝辞

大阪市立大学 河内明夫先生，大阪教育大学 柳本朋子先生はじめ，結び目の数学教育研究グループの皆様には，本報告のきっかけとなる実践研究に対し，長きに渡り多数の助言をいただきましたことをここに感謝申し上げます。

参考文献

１）結び目の数学 結び目理論の初等的入門，C.C. アダムス著 金信泰造 訳，培風館，1998

２）結び目理論とゲーム，河内明夫，岸本健吾，清水理佳，朝倉書店，2013

３）不変量とはなにか 現代数学のこころ 今井淳，寺尾宏明，中村博昭 講談社ブルーバックス，2002

４）「結び目の数学教育」への導入 ? 小学生・中学生・高校生を対象として - 第 1 号～第 4 号（2005，2007，2009，2014）

５）Teaching and Learning of Knot Theory in School Mathematics, Kawauchi, Yanagimoto (Eds,), Springer, 2012

６）中央教育審議会　教育課程部会　教育課程企画特別部会（第 7 期）（第 9 回）　配付資料 2-2　高等学校等における教科・科目の現状・課題と今後の在り方について（検討素案）（歴史教育，地理教育，理数教育，国語教育），2015